第 4 讲：直线与圆题型拓展 (2)

题型一：最值问题

1. 已知实数 x,y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$.

(1) 求 $\frac{y}{x}$ 的最大值和最小值；(2) 求 $y-x$ 的最大值和最小值；(3) 求 x^2+y^2 的最大值和最小值

2. 若点 M 是圆 $C: x^2+y^2-4x=0$ 上的任一点，直线 $l: x+y+2=0$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最小值为（　　）

A. $4-2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $8-4\sqrt{2}$　　D. 8

3. (2023 全国乙卷理科 12 题) 已知圆的半径为 1，PA 与圆 O 相切，切点为 A，过点 P 的直线与圆交于 B,C 两点，D 为 BC 的中点，$OP=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

4. 在平面直角坐标系中，A，B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点，若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x+y-4=0$ 相切，则圆 C 面积的最小值为（　　）

A. $\frac{4}{5}\pi$　　B. $\frac{3}{4}\pi$　　C. $(6-2\sqrt{5})\pi$　　D. $\frac{5}{4}\pi$

5. 已知圆 C_1:$(x-2)^2+(y-3)^2=1$,圆 C_2:$(x-3)^2+(y-4)^2=9$,M,N分别是圆 C_1,C_2上的动点,P为x轴上的动点,则 $PM+PN$的最小值为 (　　)

A. $6-2\sqrt{2}$　　B. $5\sqrt{2}-4$　　C. $\sqrt{17}-1$　　D. $\sqrt{17}$

6. (2023春·洛阳月考) 已知点 P 为直线 $y=x+1$ 上的一点,M,N分别为圆 C_1:$(x-4)^2+(y-1)^2=1$ 与圆 C_2:$(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 上的点,则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 (　　)

A. 5　　B. 3　　C. 2

7. (多选) 已知直线 l:$y=x+b$,圆 O:$x^2+y^2=4$,则下列说法正确的是 (　　)

A. 圆 O 上恰有 1 个点到直线 l 的距离为 1,则 $b=\pm 3\sqrt{2}$

B. 圆 O 上恰有 2 个点到直线 l 的距离为 1,则 $b\in(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$

C. 圆 O 上恰有 3 个点到直线 l 的距离为 1,则 $b=\pm\sqrt{2}$

D. 圆 O 上恰有 4 个点到直线 l 的距离为 1,则 $b\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

8. 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同点到直线 l:$ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,求直线 l 的倾斜角的取值范围.

题型二：综合性问题

9. 在平面直角坐标系 xoy 中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(I) 求圆 C 的方程；

(II) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，求 a 的值.

10. 在直角坐标系 xoy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$，当 m 变化时，解答下列问题：

(1) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况？说明理由；

(2) 证明过 A、B、C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

11. (2014·新课标Ⅰ)已知点 $P(2,2)$,圆 C:$x^2+y^2-8y=0$,过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点,线段 AB 的中点为 M,O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP|=|OM|$ 时,求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

12. 已知 O 为原点,线段 OA 的端点 A 在圆 M:$(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 上运动.

(1) 求线段 OA 长度的取值范围;

(2) 点 P 在线段 OA 上,且 $|OP|=\frac{1}{3}|OA|$,求动点 P 的轨迹方程.

13. (2015·新课标Ⅰ) 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C: $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于点 M、N 两点.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$.

14. 已知圆 O: $x^2+y^2=8$，直线 l: $x-y-8=0$.

(1) 若圆 O 的弦 AB 恰好被点 $P(2,1)$ 平分，求弦 AB 所在直线的方程；

(2) 点 Q 是直线 l 上的动点，过 Q 作圆 O 的两条切线，切点分别为 C，D，求直线 CD 经过的定点；

(3) 过点 $M(2,2)$ 作两条相异的直线，分别与圆 O 相交于 E，F 两点，当直线 ME 与直线 MF 的斜率互为倒数时，求线段 EF 的中点 G 的轨迹方程.

课堂总结

作业

1. 实数 x, y 满足 $x^2+y^2+2x=0$，则下列关于 $\frac{y}{x-1}$ 的判断正确的是（　　）

A. $\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$

B. $\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

C. $\frac{y}{x-1}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{y}{x-1}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 已知圆 O：$x^2+y^2=2$，直线 l:$y=kx-2$.

(1) 若直线 l 与圆 O 交于不同的两点 A,B，当 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ 时，求 k 的值；

(2) 若 $k=\frac{1}{2}$，P 是直线 l 上的动点，过 P 作圆 O 的两条切线 PC、PD，切点为 C、D，探究：直线 CD 是否过定点；

(3) 若 EF、GH 为圆 O：$x^2+y^2=2$ 的两条相互垂直的弦，垂足为 $M\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，求四边形 $EGFH$ 的面积的最大值.